

## 三维波钢混凝土壳体的理论分析与数值计算

王丹净

无锡商业职业技术学院, 江苏 无锡 214153

**摘要:** 混凝土壳体结构具有广阔的应用前景, 为探索该结构应用的理论基础, 本文基于所有的肋条, 钢板, 钢筋的抗拉抗弯效果均匀分布, 利用经典壳体理论, 推导出内衬三维波纹钢板钢筋混凝土壳体的基本微分平衡方程组。用三角级数法对该结构进行处理, 并与对照组相比较, 结果发现, 三维波纹钢混凝土壳体能够抵抗变形。

**关键词:** 钢筋混凝土壳体; 内衬三维波纹钢; 经典壳体理论

**中图分类号:** TU331

**文献标示码:** A

**文章编号:** 1000-2324(2015)04-0584-04

## Theoretical Analysis and Numerical Calculation on 3D Reinforcing Wave Steel Bar Concrete Shell

WANG Dan-jing

Wuxi Institute of Commerce, Wuxi 214153, China

**Abstract:** To explore the theoretical basis of application for the concrete shell structure, the study used the classical shell theory to deduce differential equilibrium equations of reinforced concrete shell lining 3D wave steel based on every materials uniform distribution and to treat it with triangle logarithmic. The result was showed that the concrete shell with this structure did not be easy deformation compared with CK.

**Keywords:** Reinforced concrete shell; 3D wave steel; classical shell theory

随着当前力学理论的快速蓬勃发展, 混凝土壳体理论已经成为构成弹性理论体系的重要组成部分。因为壳体受力性能良好, 非常适用于大跨度的空间结构, 所以在工程上其被广泛使用。

近年来, 混凝土壳体理论通常沿着两个研究方向在不断推进发展, 主要包括有:

第一个方向主要以前苏联科学家果里琴文赛尔、诺瓦诺夫和基里契夫斯基等为典型代表提出的数学壳体理论<sup>[1,2]</sup>。

第二方向主要以拉索夫和其学生以及他们的后继者等作为典型代表提出的工程应用上的壳体理论<sup>[3]</sup>, 该理论包括关于薄壁杆件构成的特殊情况以及一般理论。该理论的主要特点包括壳体理论中更新引进并提出完整的一套新物理假设, 并在此基础上, 进一步建立关于薄壁空间体系<sup>[4]</sup>架构的一般理论, 然后在利用这一理论可以很好地解决大多数工程应用中的壳体与薄壁杆件方面的力学问题。

为了达到提高混凝土壳体强度和稳定性, 在工程应用上往往使用横向肋条进行稠密排列以对壳体的强度进行增强。从而出现了一种新结构形式, 即横肋混凝土加强壳体。然后为了能够精确达到沿肋条以及壳面的接触线上的满足条件, 从而造成计算该类壳体方法极为复杂。现在, 为了更好地利用较为成熟的混凝土壳体理论, 当今的国内外学者常常使用简化的算法对其计算<sup>[5]</sup>, 该种算法的实质就是将每个肋条抗弯和抗拉的刚度均匀地分配于肋条所支持整个跨距范围内, 同时并把它们附加于壳体所在圆弧方向上的相应刚度中, 也就是只认为加固肋条具备所在自身平面中的拉伸以及弯曲的刚度, 对这些平面垂直方向上的变形和扭转进行忽略。这样利用基本微分混凝土壳体的平衡方程和上述假设条件, 就能可以建立基本微分横肋加强壳体的平衡方程<sup>[6]</sup>。然后在荷载分布作用下, 可以根据边界条件利用单三角级数法或者双三角级数法对横肋加强的混凝土壳体进行数学求解。

在许多科学计算的领域内, 在许多力学以及物理问题上, 研究者和普通工程技术人员已经推导出这些问题计算所要遵循和演算的基本方程(通常是常微分方程或者偏微分方程)与这些方程的相应定解条件。然而可以用解析方法得出精确解的方程只有少数性质比较简单并且几何形状呈现比较规则的那些问题。而对于大多数科学技术问题, 因为其方程所具有的某些非线性性质, 或因为求解区域具备的几何形状较复杂, 所以在通常情况下无法得到精确的解析解。而对这类问题的解决方式通

**收稿日期:** 2013-05-11

**修回日期:** 2013-05-28

**作者简介:** 王丹净(1977-),女,江苏无锡人,硕士,工程师、讲师,主要从事工程技术和工程管理相关学科的教学与科研工作. E-mail:wangdanjing@wxic.edu.cn

常采取两种途径:

第一种途径对假设进行简化<sup>[7]</sup>。把方程与几何边界条件进行简化从而转化为能够简单处理的问题,以便进一步得到于简化状态条件下的解。然而这种方法只可以在有限情况下具有现实可行性<sup>[8]</sup>,这是由于对假设进行过多简化将会导致很大误差,有时候还会导致得到的解根本就是完全错误的。

第二种途径就是数值方法<sup>[9]</sup>。目前随着计算科学和计算机科学不断发展,研究者通过多年的研究和寻找,找到了并且发展了第二种求解途径,也就是数值方法。现在,数值方法已成为对科学和工程计算问题求解的主要方式。

## 1 内衬三维波纹钢钢筋混凝土壳体概述

### 1.1 混凝土壳体介绍

经典的壳体结构可以做成各种各样的形状,从而以便适应实际的工程造形需要,而且该类结构被广泛地应用在各种工程结构上,比如大跨度的建筑物的顶盖以及中小跨度的屋面板,还有被广泛应用于工程结构和衬砌、各种类型的工业上使用的压力管道容器、冷却塔、无线电塔、反应堆的安全壳、贮液罐等。在工程结构中通常使用的壳体大多数是钢筋混凝土结构,同时也可以使用钢、石、木、砖或者玻璃钢做成。

其具体分类如下:双曲扁壳;组合型扭壳,鞍形壳;零高斯的曲率壳体;混合型的曲率壳体。壳体以壳厚度和最小曲率的半径比值,可分薄壳、中等厚壳以及厚壳。比值小于1/20为薄壳,其多用在房屋屋盖;大于1/20为中等厚壳和厚壳,其应用多在地下结构和防护结构。

### 1.2 理论研究和计算公式

在壳体的理论体系中,我们令圆柱形壳体的厚度为 $h$ ,中面圆弧半径为 $R$ ,中面上的某点 $M$ 沿母线方向的距离用 $\alpha$ 来表示,那么, $M$ 点所处的位置能够用坐标和圆周角 $\beta$ 来表示,用 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 来代表其中的表面力。示意图如图1所示:

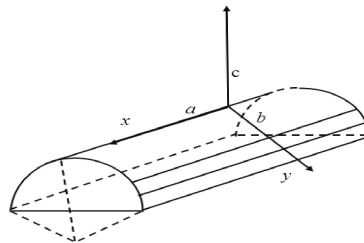


图1 壳体的示意图

Fig.1 Schematic diagram of shell

在图1中, $a, b, c$ 分别可以代表壳体的中面各方向位移。推导可得,在此坐标系下,壳体的微分平衡方程为如下方程组所示:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{11}}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \beta} + RY = 0 \\ \frac{\partial N_{22}}{\partial \beta} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha} + Q_2 + RY = 0 \\ -N_{22} + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + RZ = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_{22}}{\partial \beta} - RQ_2 = 0 \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta} - \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha} - RQ_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

而壳体内部的内力以及内力矩各个正方向如图2:

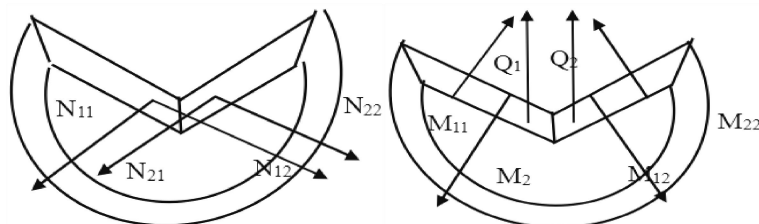


图2 壳体的内力以及内力矩示意图

Fig.2 Schematic diagram of the internal forces and force moment of the shell

而壳体中面基本的变形中量和各个内力以及内力矩可由如下方程组表示:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial a}{R \cdot \partial \alpha}, k_1 = -\frac{\partial^2 c}{R^2 \cdot \partial \alpha^2} \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial b}{\partial \beta} + c \right), k_2 = -\frac{\partial^2 c}{R^2 \cdot \partial \beta^2} \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial b}{\partial \alpha} \right), k_{12} = -\frac{\partial^2 c}{R^2 \cdot \partial \alpha \partial \beta} \end{cases} \begin{cases} N_{11} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \cdot R \left[ \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \mu \cdot \left( \frac{\partial b}{\partial \beta} + c \right) \right] \\ N_{22} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \cdot R \left( \frac{\partial b}{\partial \beta} + c + \mu \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha} \right) \\ N_{12} = N_{21} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \cdot R \left( \frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial b}{\partial \alpha} \right) \\ M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot R^2 \left( \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} \right) \\ M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot R^2 \left( \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} \right) \\ M_{12} = M_{21} = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial \beta} \end{cases} \quad (3)$$

在处理混凝土内配筋时, 可使用如下方法:

将上部的钢筋网以两个方向钢筋薄膜做为计算条件, 假设其应变在沿厚度的方向上无变化, 对其自身平面内抗拉以及抗弯作用做考虑。设定壳体上部的两个方向配筋的等效的钢筋膜厚度分别是  $d_1 = \pi d_\alpha^2 / 4l_\alpha$  和  $d_2 = \pi d_\beta^2 / 4l_\beta$ 。且距壳体中面距离分别是  $h_1$  和  $h_2$ 。而将肋内配单根钢筋的抗拉以及抗弯作用都均匀地分布于肋条所支持跨距许可范围内, 设该面积为  $S$ , 距壳体中面距离为  $h'_2$ 。中面的应变表示钢筋应力如下:

$$\text{上部钢筋: } \begin{cases} \sigma = E(\varepsilon_1 + h_1 k_1) \\ \sigma' = E(\varepsilon_2 + h_2 k_2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{肋内钢筋: } \sigma'' = E(\varepsilon_2 - h'_2 k_2) \quad (5)$$

以壳体的中面位移表示内衬三维波纹钢钢筋混凝土壳基本的微分平衡方程:

$$\begin{cases} \left[ 1 + \frac{Ed_1(1-\mu^2)}{Eh} \right] \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \beta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{Ed_1 h_1 (1-\mu^2)}{EhR} \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{XR^2}{Eh} (1-\mu^2) = 0 \\ \left[ \mu \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \frac{Ed_1 h_1}{R} \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} + \left[ 1 + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left( \frac{ES_\beta}{l} + \frac{ES_n}{l} + Ed_2 + \frac{ES}{l} \right) \right] c + \right. \\ \left. 2 \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left( \frac{ES_\beta e_\beta}{Rl} + \frac{ES_n e_n}{Rl} - \frac{Ed_2 h_2}{R} + \frac{ES h'_2}{Rl} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} + \right. \\ \left. \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left( \frac{ES_\beta e_\beta}{Rl} + \frac{ES_n e_n}{Rl} - \frac{Ed_2 h_2}{R} + \frac{ES h'_2}{Rl} \right) \frac{\partial^2 b}{\partial \beta^2} + \right. \\ \left. \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left[ \frac{E(S_\beta e_\beta^2 + I_\beta)}{R^2 l} + \frac{E(S_n e_n^2 + I_n)}{R^2 l} + \frac{ES h_2^2}{R^2 l} + \frac{ES h'_2}{R^2} \right] \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^4} \right. \\ \left. + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \cdot \frac{Ed_1 h_1^2}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^4} + \frac{h^2}{12R^2} \nabla^4 c - \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \cdot R^2 Z = 0 \right. \\ \left. \left[ 1 + \frac{Ed_1(1-\mu^2)}{Eh} \right] \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \beta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha \partial \beta} \right. \\ \left. \frac{Ed_1 h_1 (1-\mu^2)}{EhR} \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{XR^2}{Eh} (1-\mu^2) = 0 \right. \\ \left. \left[ 1 + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \cdot \left( \frac{ES_\beta}{l} + \frac{ES_n}{l} + \frac{ES}{l} + Ed_2 - \frac{ES_\beta e_\beta}{Rl} - \frac{ES_n e_n}{Rl} - \frac{ES h_2}{Rl} + \frac{Ed_2 h_2}{R} \right) \right] \frac{\partial^2 b}{\partial \beta^2} + \right. \\ \left. \left[ 1 + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \cdot \left( \frac{ES_\beta}{l} + \frac{ES_n}{l} + \frac{ES}{l} + Ed_2 - \frac{ES_\beta e_\beta}{Rl} - \frac{ES_n e_n}{Rl} - \frac{ES h_2}{Rl} + \frac{Ed_2 h_2}{R} \right) \right] \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} + \right. \\ \left. \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \cdot \left( \frac{ES_\beta e_\beta}{Rl} + \frac{ES_n e_n}{Rl} + \frac{ES h_2}{Rl} - \frac{Ed_2 h_2}{R} + \frac{Ed_2 h_2^2}{R^2} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^4} \right. \\ \left. \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \cdot \left( \frac{E(S_\beta e_\beta^2 + I_\beta)}{R^2 l} + \frac{E(S_n e_n^2 + I_n)}{R^2 l} + \frac{ES h_2^2}{R^2 l} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^4} \right. \\ \left. + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} R^2 Y = 0 \right. \end{cases}$$

## 2 实例验算

选取数值

$$\begin{cases} L = 30\text{m}, l = 0.6\text{m}, \theta = 120^\circ, h = 0.3\text{m} \\ S_\beta = 0.16\text{m}, S_n = 0.002\text{ m}^2, l_\beta = 0.001\text{ m}^4, l_n = 0.00002\text{ m}^4 \\ e_\beta = 0.28\text{ m}, e_n = 0.28\text{ m} \\ E = 2.6 \times 10^{10}\text{ pa}, E' = 2.6 \times 10^{11}, \mu = 0.2 \\ d_\alpha = 20\text{ mm}, l_\alpha = 150\text{ mm}, d_\beta = 10\text{ mm}, l_\beta = 200\text{ mm} \\ S = 80\text{ mm}^2, h_1 = 0.11\text{ m}, h_2 = 0.11\text{ m}, h'_2 = 0.45\text{ m} \end{cases}$$

假设壳体承受的载荷为均匀分布,  $g = 10000\text{ N/m}^2$ , 可得:

$$X = 0, Y = 10000 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} - \beta\right), Z = 10000 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \beta\right)$$

对厚度为0.3到0.6之间普通混凝土壳体的和内衬三维波纹钢的混凝土壳体位移进行对比, 可得水平位移与垂直位移的对比如表1所示:

表 1 普通的和内衬三维波纹钢的混凝土水平、垂直位移对比表

Table1 Ordinary and three-dimension ripple steel concrete horizontal, vertical displacement comparison

位移最大值 Maximum displacement	普通混凝土壳体 Ordinary concrete shell	内衬三维波纹钢混凝土壳体 Three-dimension wave steel concrete shell
水平	9.67 cm	11.19 cm
垂直	7.84 cm	9.82 cm

两种壳体结构每点水平位移对比图如图1所示:

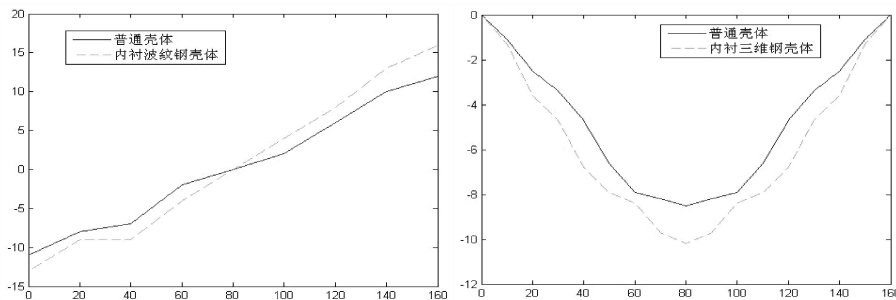


图 6 半段壳体中面水平和垂直方向的位移示意图

Fig.6 Schematic diagram of horizontal and vertical displacement of the half of surface

### 3 结论

在本文的内衬三维波纹钢钢筋混凝土壳体计算中, 以经典壳体理论体系下的基本微分平衡方程为基础, 使用将肋条、波纹钢板、钢筋的抗拉和抗弯作用力均匀地分布于肋条所支持壳体的整个跨距内, 而对肋条、波纹钢板、钢筋的抗扭作用进行忽略, 利用经典壳体理论体系中的关于直法线的假设, 从而建立它们彼此间的变形和壳体中面变形关系方程式, 然后进一步推导并同时建立内衬三维波纹钢钢筋混凝土壳体基本微分的平衡方程式。以实例计算结果能够看出。在荷载均匀分布的作用下, 如果在混凝土壳体中内衬有波纹钢板, 相比于普通壳体, 垂直方向的位移最大可以降低19%, 而水平方向位移最大可以降低22.8%。因此内衬三维波纹钢板可以大大提高钢筋混凝土壳体壳体的稳定性和承载力, 较有效地对混凝土壳体的变形趋势进行控制, 提高了混凝土壳体抗重压的能力, 在工程应用上具有极其重要的应用前景。

### 参考文献

- [1] 诺瓦诺夫.壳体的一般般理论[M].北京:人民教育出版社,1988:112-121
- [2] 琴文塞尔.弹性薄壳理论[M].上海:上海科学技术出版社,2001:121
- [3] 拉索夫.板壳理论[M].北京:科学出版社,2005:32-36
- [4] 诺沃洛夫.薄壳理论[M].北京:科学出版社,2002:56
- [5] 王德仁.非线性方程组的解法与最优化方法[M].北京:人民教育出版社,1979:87-89
- [6] 杨国平,车惠民.混凝土箱梁非线性分析[J].西南交通大学学报,2009,25(2):237-241
- [7] Neo D. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams[J]. Journal of the American Concrete Institute, 2010,65(9):757-766,2010
- [8] Franklin H A. Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Frames and Panels[D]. Berkeley: University of California, Berkeley, 2009:34-36
- [9] 叶国占.不规则混凝土壳体的温度效应研究[D].上海:同济大学,2006:34-36