山东农业大学学报(自然科学版),2015,46(4):625-627 VOL.46 NO.4 2015
Journal of Shandong Agricultural University (Natural Science Edition) doi:10.3969/j.issn.1000-2324.2015.04.030

主理想环上矩阵可对角化的新判据

邓 勇

喀什师范学院数学系, 新疆 喀什市 844006

摘 要: 矩阵的对角化问题在矩阵理论中占有重要地位.为将域上矩阵可对角化的结果进行推广,研究了主理想环上矩阵的可对角化问题,获得了主理想环上一类具有最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta),\alpha\neq\beta$ 的矩阵可对角化的充分必要条件.在此基础上,进一步证明了具有二次最小多项式的两个可对角化矩阵 A,B 有公共特征向量,当且仅当它们的交换子 $[A,B]$ 是奇异矩阵.

关键词: 主理想环; 对角化; 最小多项式; 特征向量; 交换子

中图法分类号: O151.21; O157.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-2324(2015)04-0625-03

New Diagonalization Condition for Matrices in a Domain of Principal Ideal

DENG Yong

Department of Mathematics/Kashgar Teacher's College, Kashgar 844006, *China*

Abstract: The diagonalization of matrices has an important position in the matrix theory. In order to expand the results for diagonalization of matrices over fields, we discussed the diagonalization of matrices over a domain of principal ideals, and obtained the necessary and sufficient conditions of diagonalization of matrices over a domain of principal ideals with minimal polynomial $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta),\alpha\neq\beta$. Further, on the basis of the obtained results, the conditions under which the matrices A and B have common eigenvectors if and only if their commutator $[A, B]$ is singular matrix, was proved.

Keywords: Domain of principal ideals; diagonalization; minimal polynomial; eigenvector; commutator

1 研究现状

为方便讨论,本文用 R 表示有单位 $e\neq 0$ 的主理想环; I_n 表示 $n\times n$ 阶单位矩阵; $M_n(R)$ 表示 R 上 $n\times n$ 阶矩阵环; $M_{1\times n}(R)$ 表示 R -模; $GL(n,R)$ 表示 R 上阶可逆 $n\times n$ 矩阵关于加法和乘法所构成的一般线性群; $p(\lambda)$ 和 $m(\lambda)$ 分别表示矩阵 A 的特征多项式和最小多项式; $[A,B]=AB-BA$ 表示矩阵 A,B 的交换子.

若用相似变换可将 $A\in M_n(R)$ 化为对角矩阵,则称其可对角化.即 $\exists U\in GL(n,R)$ 使得 $UAU^{-1}=diag(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in M_n(R)$.因此,若 $A\in M_n(R)$ 可对角化,则其特征多项式 $p(\lambda)$ 可写为 $p(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=(\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\alpha_r)^{k_r}$ 的形式.其中 $\alpha_i\in R$ 互不相同, $k_i,(i=1,2,\cdots,r)$ 是非负整数.显然,若 $A\in M_n(R)$ 可对角化,则其最小多项式 $m(\lambda)$ 无重根,即 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\cdots(\lambda-\alpha_r)$.特别地,若 $R=F$ 是域,则最小多项式无重根是域 F 上的矩阵 A 可对角化的充要条件[1].但是,对有单位的交换环(尤其是主理想环 R)上的矩阵而言,最小多项式无重根只是其可对角化的必要条件,而非充分条件[2].除此之外,类比域上的矩阵可对角化条件,文献[3]证明了 $A\in M_n(R)$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $p(\lambda)$ 有 n 个互异特征值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$;文献[4]证明了 $A\in M_n(R)$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有对应特征值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ (不必互异)的 n 个不同的特征向量 $\bar{\boldsymbol{u}}_1,\bar{\boldsymbol{u}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{u}}_n\in M_{1\times n}(R)$,且它们构成 R -模 $M_{1\times n}(R)$ 的一组基底.然而,因基特征向量 $\bar{\boldsymbol{u}}_1,\bar{\boldsymbol{u}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{u}}_n$ 的计算十分繁琐且无一般算法,故实际操作相当困难.

本文进一步研究 $M_n(R)$ 上具有二次最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ 的矩阵可对角化的判定问题,其中 $\alpha,\beta\in R$ 且 $\alpha\neq\beta$.在此基础上,给出了 $A,B\in M_n(R)$ 存在公共特征向量的条件.

2 判别定理

设 $A\in M_n(R)$ 且 $rankA=k$ 是幂等矩阵.众所周知,幂等矩阵的最小多项式为 $m(\lambda)=\lambda(\lambda-e)$ 且 $\exists U\in GL(n,R)$ 使得 $UAU^{-1}=diag(I_k,\mathbf{0})$,即其可对角化[5].下面,我们来描述 $M_n(R)$ 中具有二次最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$, $(\alpha\neq\beta)$ 的可对角化矩阵的特征.

收稿日期: 2015-01-11 **修回日期:** 2015-03-02
基金项目: 国家社科基金项目(11XTJ001)
作者简介: 邓 勇(1967-),男,四川遂宁人,学士,教授,硕士生导师,主要从事矩阵及其数值计算研究. E-mail:dengy-ks@sohu.com
数字优先出版: 2015-07-04 http://www.cnki.net

定理 1 设 $A\in M_n(R)$ 且 $p(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=(\lambda-\alpha)^k(\lambda-\beta)^{n-k}$,其中 $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$,$1\le k\le n$.矩阵 A 可对角化,即 $\exists T\in GL(n,R)$ 使得 $TAT^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha I_k & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta I_{n-k}\end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ 下列两个条件

(i) $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ 是 A 的最小多项式;

(ii) $(A-\alpha I_n)\equiv\mathbf{0}(\bmod(\beta-\alpha))$.

同时成立.

证明 (必要性)设 $A\in M_n(R)$ 的特征多项式 $p(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=(\lambda-\alpha)^k(\lambda-\beta)^{n-k}$,其中 $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$,$1\le k\le n$ 且 A 可对角化,即 $\exists T\in GL(n,R)$ 使得 $TAT^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha I_k & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta I_{n-k}\end{bmatrix}$.显然,$m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ 是 A 的最小多项式.又因

$$A-\alpha I_n=T^{-1}\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & (\beta-\alpha)I_{n-k}\end{array}\right]T=T^{-1}\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & I_{n-k}\end{array}\right]T(\beta-\alpha)\equiv\mathbf{0}(\bmod(\beta-\alpha)).$$

故必要性得证.

(充分性)设 $A\in M_n(R)$ 且 $p(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)=(\lambda-\alpha)^k(\lambda-\beta)^{n-k}$,其中 $\alpha,\beta\in R,\ \alpha\neq\beta$,$1\le k\le n$.由条件(i),因 $A-\alpha I_n\equiv\mathbf{0}(\bmod(\beta-\alpha))$,故 $A-\alpha I_n=(\beta-\alpha)P$,其中 $P\in M_n(R)$.再由条件(ii)可知 A 的最小多项式是 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$,于是有

$$\mathbf{0}=m(A)=(\alpha I_n-A)(\beta I_n-A)=(\beta-\alpha)^2(P^2-P).$$

因 $\alpha\neq\beta$,故由上式可得 $P^2=P$,即 P 是幂等矩阵.又因 $A=I_n\alpha+(\beta-\alpha)P$ 且 P 可对角化,故 A 可经相似变换化为 $\begin{bmatrix}\alpha I_k & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta I_{n-k}\end{bmatrix}$ 的形式,即 A 可对角化.充分性得证.

推论 1 设 $A\in M_n(R)$ 且 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$,其中 $\alpha,\beta\in R$ 且 $\alpha\neq\beta$.若 $(\alpha-\beta)$ 是 R 中的单位的因子,则 A 可对角化.

推论 2 设 $A\in M_n(R)$ 且 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$,其中 $\alpha,\beta\in R$ 且 $\alpha\neq\beta$.若 A 可对角化,则存在唯一一对幂等矩阵 $P_\alpha,P_\beta\in M_n(R)$ 使得

(a) $A=\alpha I_n+(\beta-\alpha)P_\beta$; ($b$) $P_\alpha+P_\beta=I_n$; (c) $A=\beta I_n+(\alpha-\beta)P_\alpha$; ($d$) $A=\alpha P_\alpha+\beta P_\beta$.

证明 (存在性)设 $A\in M_n(R)$ 且 $m(\lambda)=(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$,其中 $\alpha\neq\beta$.若 A 可对角化,则首先由定理 1 的充分性证明可知,矩阵 A 可表为 $A=\alpha I_n+(\beta-\alpha)P_\beta$,其中 $P_\beta\in M_n(R)$ 是幂等矩阵,即(a)成立.其次,令 $P_\alpha=I_n-P_\beta$.显然它也是幂等矩阵.于是得 $P_\alpha+P_\beta=I_n$,即(b)成立.再次,由(b)可知 $P_\beta=I_n-P_\alpha$,因此,(a)可改写为 $A=\alpha I_n+(\beta-\alpha)(I_n-P_\alpha)=\beta I_n+(\alpha-\beta)P_\alpha$,即($c$)成立.最后,由($b$)可将($a$)表为 $A=\alpha(P_\alpha+P_\beta)+(\beta-\alpha)P_\beta=\alpha P_\alpha+\beta P_\beta$,即($d$)成立.

(唯一性)对于矩阵 A,假设还存在不同于 $\{P_\alpha,P_\beta\}$ 的另一幂等矩阵对 $\{Q_\alpha,Q_\beta\}$,并且它们也满足等式(a)-(d).因 $A=\alpha I_n+(\beta-\alpha)P_\beta=\alpha I_n+(\beta-\alpha)Q_\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$,故有 $P_\beta=Q_\beta$.同理可证 $P_\alpha=Q_\alpha$.

在此,我们强调上述结果对初等除环上的矩阵同样正确.此外,对特殊环上的矩阵,其中有些结果还可进一步拓展.例如,有单位的交换环上的幂等矩阵可对角化[6].同时,也提请读者注意:在主理想环中虽具有二次最小多项式,但不能对角化的矩阵分类与相似变换之间的关系至今仍未得到彻底解决.

3 结果运用

设 $A,B\in M_n(R)$.若 $\exists\bar{\boldsymbol{u}}\in M_{1\times n}(R)$ 使得 $\bar{\boldsymbol{u}}A=\bar{\boldsymbol{u}}\alpha$ $(A\bar{\boldsymbol{u}}=\alpha\bar{\boldsymbol{u}})$ 且 $\bar{\boldsymbol{u}}B=\bar{\boldsymbol{u}}\beta$ $(B\bar{\boldsymbol{u}}=\beta\bar{\boldsymbol{u}})$,其中 $\alpha,\beta\in R$,则称 A,B 有公共的左(右)特征向量.显然,若 A,B 在 R 上有公共的左特征向量,则它们在 R 上必有公共的右特征向量.因此,下文所称 A,B 有“公共的特征向量”意指 A,B 有公共的左特征向量.容易证明:若 A,B 在 R 上仅有一个公共的特征向量,则 A,B 的特征多项式 $p(\lambda)$ 和 $q(\lambda)$ 能够表成 $p(\lambda)=(\lambda-\alpha)c(\lambda)$ 和 $q(\lambda)=(\lambda-\beta)d(\lambda)$ 的形式.特别地,当 $R=F$ 是域时,矩阵 $A,B\in M_n(F)$ 存在公共特征向量的问题已基本解决[7,8].

定理 2 幂等矩阵 $A,B\in M_n(R)$ 有一个公共的特征向量 $\Leftrightarrow$ 交换子 $[A,B]$ 是奇异矩阵.

证明(必要性)设 $\overline{\boldsymbol{u}} \in M_{1\times n}(R)$ 是 $A,B \in M_n(R)$ 的一个公共特征向量,即 $\overline{\boldsymbol{u}}A = \overline{\boldsymbol{u}}\alpha$ 且 $\overline{\boldsymbol{u}}B = \overline{\boldsymbol{u}}\beta$,其中 $\alpha,\beta \in R$.于是 $\overline{\boldsymbol{u}}[A,B] = \overline{\boldsymbol{u}}(AB-BA) = \overline{\boldsymbol{u}}AB - \overline{\boldsymbol{u}}BA = \alpha\overline{\boldsymbol{u}}B - \beta\overline{\boldsymbol{u}}A = \overline{\boldsymbol{u}}I_n(\alpha\beta-\beta\alpha) = \mathbf{0}$.因 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 是 $M_{1\times n}(R)$ 中的非零向量,故上式说明交换子 $[A,B]$ 是奇异矩阵.

(充分性)若 A , B 中有一个是 I_n 或 $\mathbf{0}$,则结论显然成立.设 $1 \le rankA = k < n$ 且 $1 \le rankB < n$.因 A 是幂等矩阵,故 $\exists T \in GL(n,R)$ 使得

$$TAT^{-1} = D = \begin{bmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{且} TBT^{-1} = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $C_{11} \in M_k(R)$, $C_{12} \in M_{k.n-k}(R)$, $C_{21} \in M_{n-k.k}(R)$, $C_{22} \in M_{n-k}(R)$.因 $B^2 = B$,故 $C^2 = C$.进而,由矩阵乘法可得

$$C_{11}C_{11}+C_{12}C_{12}=C_{11} \tag{1}$$

$$C_{11}C_{12}+C_{12}C_{12}=C_{12} \tag{2}$$

$$C_{21}C_{11}+C_{22}C_{21}=C_{21} \tag{3}$$

$$C_{21}C_{12}+C_{22}C_{22}=C_{22} \tag{4}$$

显然, A , B 有公共特征向量 $\Leftrightarrow$ D , C 有公共特征向量,并且 $rank[A,B]=rank[D,C] < n$.此外,容易看出 $[D,C] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_{12} \\ -C_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.因 $rank[D,C] < n$,故 $rankC_{12} < k$ 和 $rankC_{21} < n-k$ 至少有一个成立.

Ⅰ.若 $rankC_{12} < k$,则有 $rank[C_{11},C_{12}] < k$ 和 $rank[C_{11},C_{12}] = k$ 之一成立.

(i)当 $rank[C_{11},C_{12}] < k$ 时,则 $\exists\overline{\mathbf{0}} \ne \overline{\boldsymbol{u}} \in M_{1\times k}(R)$ 使得 $\overline{\boldsymbol{u}}[C_{11},C_{12}] = \overline{\mathbf{0}}$.即 $[\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\mathbf{0}},\cdots,\overline{\mathbf{0}}] \in M_{1\times n}(R)$ 为 D , C 的公共左特征向量.

(ii)当 $rank[C_{11},C_{12}] = k$ 时,因 $rankC_{12} < k$,故 $\exists\overline{\mathbf{0}} \ne \overline{\boldsymbol{u}} \in M_{1\times k}(R)$ 使得 $\overline{\boldsymbol{u}}C_{12} = \overline{\mathbf{0}}$ 且 $\overline{\boldsymbol{u}}C_{11} \ne \overline{\mathbf{0}}$.由(1)、(2)两式分别可得 $(\overline{\boldsymbol{u}}C_{11})C_{11} = \overline{\boldsymbol{u}}C_{11}$ 和 $(\overline{\boldsymbol{u}}C_{11})C_{12} = \overline{\mathbf{0}}$.因此, $[\overline{\boldsymbol{u}}C_{11},\overline{\mathbf{0}},\cdots,\overline{\mathbf{0}}] \in M_{1\times n}(R)$ 即为 D , C 的公共左特征向量.

Ⅱ.若 $rankC_{21} < n-k$,则有 $rank[C_{21},C_{22}] < n-k$ 和 $rank[C_{21},C_{22}] = n-k$ 之一成立.

(i)当 $rank[C_{21},C_{22}] < n-k$ 时,则 $\exists\overline{\mathbf{0}} \ne \overline{\boldsymbol{u}} \in M_{1\times(n-k)}(R)$ 使得 $\overline{\boldsymbol{u}}[C_{21},C_{22}] = \overline{\mathbf{0}}$.于是, $[\overline{\mathbf{0}},\cdots,\overline{\mathbf{0}},\overline{\boldsymbol{u}}] \in M_{1\times n}(R)$ 即是 D , C 的公共左特征向量.

(ii)当 $rank[C_{21},C_{22}] = n-k$ 时,则 $\exists\overline{\mathbf{0}} \ne \overline{\boldsymbol{u}} \in M_{1\times(n-k)}(R)$ 使得 $\overline{\boldsymbol{u}}C_{21} = \overline{\mathbf{0}}$ 且 $\overline{\boldsymbol{u}}C_{22} \ne \overline{\mathbf{0}}$.由(4)、(3)两式分别可得 $(\overline{\boldsymbol{u}}C_{22})C_{22} = \overline{\boldsymbol{u}}C_{22}$ 和 $(\overline{\boldsymbol{u}}C_{22})C_{21} = \overline{\mathbf{0}}$.于是, $[\overline{\mathbf{0}},\cdots,\overline{\mathbf{0}},\overline{\boldsymbol{u}}C_{22}] \in M_{1\times n}(R)$ 即为 D , C 的公共左特征向量.

推论　设 $A,B \in M_n(R)$ 可对角化,并且它们的最小多项式分别为 $m_A(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$ 和 $m_B(\lambda) = (\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)$,其中 $\alpha_i,\beta_i \in R,(i=1,2)$, $\alpha_1 \ne \alpha_2$ 且 $\beta_1 \ne \beta_2$.于是, A , B 有公共特征向量 $\Leftrightarrow$ $[A,B]$ 是奇异矩阵.

证明　由第二节的推论 2 可知,对分别具有二次最小多项式 $m_A(\lambda)$ 和 $m_B(\lambda)$ 的可对角化矩阵 A 和 B 而言,存在幂等矩阵对 $P,Q \in M_n(R)$ 使得 $A = I_n\alpha_1 + (\alpha_2-\alpha_1)P$ 且 $B = I_n\beta_1 + (\beta_2-\beta_1)Q$.因此, A , B 有公共特征向量 $\Leftrightarrow$ 幂等矩阵 P 和 Q 有公共特征向量.因 $(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1) \ne 0$,并容易验证 $rank[A,B] = rank[P,Q]$ 成立,故由定理 2 可知推论正确.

参考文献

[1] Matoušek J.Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra [M]. USA:American Mathematical Society, 1991

[2] 魏慧敏.可交换矩阵的对角化问题[J].哈尔滨师范大学学报(自然科学版),2013,29(5):15-17

[3] 黄允宝.关于可对角化线性算子的一点注记[J].杭州师范大学学报(自然科学版),2010,9(5):4-6,17

[4] Prokip V. On similarity of matrices over commutative rings [J]. Lin. Alg. Appl., 2005(399):225-233

[5] 张　慧.对幂等矩阵的研究[J].陕西科技大学学报(自然科学版),2012,30(6):139-142

[6] 王　羡,王登银,刘笑颖.交换环上幂等矩阵的对角化和秩[J].中国矿业大学学报,2009,38(6):909-912

[7] 赵可琴,张小凯,陈铁生.两矩阵的公共特征向量与同时三角化探讨[J].许昌学院学报,2012,31(5):122-125

[8] Tsatsomeros M. A criterion for the existence of common invariant subspaces of matrices [J]. Lin. Alg. Appl., 2001(322):51-59