山东农业大学学报(自然科学版),2016,47(4):600-603 VOL.47 NO.4 2016
Journal of Shandong Agricultural University (Natural Science Edition) doi:10.3969/j.issn.1000-2324.2016.04.024

由图结构确定的交换环研究

单金炘,王荣荣,王成敏
江南大学 理学院, 江苏 无锡 214125

摘 要：针对由图结构所确定的交换环的代数结构、性质，本文深入讨论了无圈图（独点、星图、双星图）与交换环之间的对应关系，并确定了相应的交换环的代数结构及同构分类，同时对有圈图的图结构进行了刻画。结果表明：只有唯一条件符合时，环的零因子图才能确定，从而奠定完全图带一个角对应的交换环代数结构的理论与实践基础。

关键词：交换环; 无圈图; 代数结构
中图法分类号：G633.62 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-2324(2016)04-0600-04

Research on Commutative Ring Determined by the Graph Structure

SHAN Jin-xin, WANG Rong-rong, WANG Cheng-min
School of Science/Jiangnan University, Wuxi 214122, *China*

Abstract: This paper discussed the corresponding relationship between the acyclic graph (isolated vertex, star graph, double star graph) and commutative ring, in terms of the algebraic structures and properties of commutative ring determined by the graph structure. It also confirmed corresponding commutative ring's algebraic structures with isomorphism classification and characterized the graph structure of cyclic graph. The result showed that only when the condition was achieved, zero-divisor graph of algebraic ring could be determined. Hence, it established the theoretical and practical foundation for the complete graph with an angle which was corresponding to algebraic structures of commutative ring.

Keywords: Commutative ring; acyclic graph; algebraic structure

近年来，零因子图的研究在代数领域越来越受到学者的关注，主要研究内容：在一定的条件下，环与半群的代数性质、结构是否与其零因子图的性质、结构存在着关联关系。Yousefian 在对半群的零因子图进行定义时，明确指出了关联条件：乘法交换半群 S 的元为 0，且满足 $0S=\{0\}$，其全体零因子的集合为 $Z(S)$，零因子图则为$\Gamma(S)$，顶点集记为 $Z(S)^*$，设任意两个顶点为 x，y，当出现条件 $xy=0$ 且 $x\neq y$ 时，这两个顶点只有一条边相连[1]。若该乘法交换半群未包含不等于 0 的零因子，则其零因子图为空图。由于交换环的本身是元为 0 的乘法交换半群，所以也具备了相对应的零因子图。从两者的研究文献看，零因子图是因为交换环的研究需要而产生的，其染色素与团数的关系、图性质与环性质的关系，是该领域的主要研究方向。但是在早期，0 也被定义为图的顶点，因此该点与其它的顶点存在相连关系。在后期的研究中，交换环的零因子图被重新定义，0 不再作为图的顶点出现，这样对环的代数结构能够更好地进行刻画，这种新的定义被当前的学者普遍采纳。

下面给出一些相关的概念。首先是完全图的概念，即任何一组不同的顶点，都有一条简单的边进行连接所构成的图。基于同构原则，就算顶点有 n 个，其完全图也仅有一个(K_n)，若一个完全图的顶点被分解为 2 个非空的子集 x 与 y，两者的任何一个顶点都相互连接，该图则被称为完全二部图($K_{|X|,\ |Y|}$)，当符合条件$|X|=1$ 时，该完全二部图则被称为星图($K_{|Y|}$)。两个星图的中心点被某一个图所连接，该图则被称为双星图。按照正常的图论，连接顶点 x 与 y 的边通常用 x-y 表示，但是在交换环中，该符号同时具备了减法的含义。为了区别交换环内本身的减法符号，在后面的研究中，连接顶点 x 与 y 的边用 x-oy 表示。此次所讨论的环 R 均是带有单位元的交换环(不一定是有限环)，环 R 是图 G 对应的交换环。当 $G=\Gamma(R)$时，若环 R 中没有非零的幂零元，则称 R 是 reduced 环。对于交换环 R，用 $Z(R)$表示 R 的全体零因子集合，环 R 的幂零根则用 $N(R)$表示，特征用 char(R)表示。

1 无圈图对应的环的代数结构

Lakos证明了无圈的零因子图为独点、星图及双星图[2]。关于无圈图与半群之间的对应关系的研究这方面已取得了很多成果，可参见文献[3-8]。然而，对于交换环这一方面却少有系统的研究，这部

收稿日期：2014-03-11 **修回日期**：2014-03-22
基金项目：国家自然科学基金:两类码的最优性及组合编制研究(11471144)
作者简介：单金炘(1989-),男,江苏无锡人,硕士研究生.研究方向:组合设计理论、图论等. E-mail:wcm@jiangnan.edu.cn
数字优先出版: 2015-09-30 http://www.cnki.net

分主要讨论无圈图与交换环之间的对应关系。首先给出独点对应的交换环的代数结构，有如下结论：

定理 1.1 设 R 是交换环并满足$|Z(R)|=2$，则 $R\cong Z_4$ 或者 $R\cong Z_2[x]/(x^2)$。

证明: 不妨设 $Z(R)=\{0，x\}$，其中 $x\neq 0$，不难验证 $x^2=0$，由正合列 $0\to Ann(x)\to R\to Rx\to 0$ 可得 $R/Ann(x)\cong Rx$。

对于有限星图与交换环之间的对应关系，Qijiao 等人进行了讨论，给出有限星图对应的交换环的代数结构[9]，即$\Gamma(R)$是有限星图当且仅当 R 同构于下列环之一：

Z_8，$Z_2[x]/(x^3)$，$Z_4[x]/(2x,x2-2)$，Z_9，$Z_3[x]/(x^2)$，$Z_2\times F$

其中 F 是有限域。但是对于无限星图与交换环的对应关系，这方面的研究还比较少，特别是无限星图确定的交换环的代数结构至今仍然没有完全解决。下面直接从图的结构出发，采用代数与图论结合的方法讨论无限星图对应的环的代数结构、性质，证明思路是全新的。

定理 1.2 设交换环 R 无限星图的满足条件是$\Gamma(R)$，则以下结论成立：

(1)如果 R 为 reduced 环，则 $R\cong Z_2\times D$，D 为无限整环。

(2)如果 R 不是 reduced 环，则 $R/Z(R)\cong Z_2$，并且 R 不是 Artin 环。$char(R)=0$，或者 2，或者 4。

证明: (l)当一个 $y\in Z(R)^*$已知时，且 $deg(y)=1$ 的条件满足，R 为 reduced 环，则 $Ann(y)=\{0,x\}$，x 作为$\Gamma(R)$的中心点，满足 $x\neq y$，因为不难验证 $x^2=x$，因此可以对 $R=R_1\oplus R_2$ 直和分解，在该等式中，$R_1=Rx$，$R_2=R(1-x)$，$\Gamma(R)$为无限星图，则 R 为无限环。在 R_i 中，无限环至少有一个存在，其中 i 的数值为 1 或 2。设$|R_1|=\infty$，$|R_2|-1\leq 1$，可以得出：$|R_2|=2$。对 R_1 为整环的证明如下：

首先反向证明，设 R_1 非整环，在该假设中$\Gamma(R_1)\neq 0$，如果 $r\in Z(R_1)^*$的条件满足 $deg(r)\geq 2$，则有 2 个不相等的点 x、y 存在，而$\Gamma(R)$的顶点集$\{(x,0),(y,0)\}$和$\{(r,0),(r,1),(0,1)\}$组成了 $K_{2,3}$，显然与$\Gamma(R)$为星图存在着矛盾，所以$\Gamma(R_1)$应没有顶点度＞1 的点存在，而且$\Gamma(R_1)$为连通图，则 $deg(r)=1$ 不难证明，但是跟$\Gamma(R_1)$为无限图又有矛盾。

根据以上分析，无限整环 D 是存在的，且 $R\cong Z_2\times D$。

(2)反向证明 R 并非 Artin 环。设 R 是 Artin 环，若 R 为局部环，$Z(R)=N(R)=\{0,x\}$，$\Gamma(R)$为独点集，这与已存在的集矛盾，所以 R 并非局部环。对比(1)可知，$R\cong Z_2\times D$，D 为无限整环，这跟 R 不是 reduced 环互相矛盾。

(3)证明 $char(R)=0,2,4$。首先要使 $char(R)=n>0$。由于 $N(R)=\{0,x\}$，因此 $2x=0$，根据以上条件可以推断出 n 为偶数，如果 n 为奇数，$nx=0$，$2x=0$，则得出 $x=0$，这肯定不可能。所以 n 可以用以下等式表示：$n=2^ik$，$i\geq 1$，k 为奇数，根据已经推断出的 n 为偶数，则当 $n<6$ 的情况下，其数值必定为 2,4。

下面给出无限星图对应的无限交换环的例子：

例 1.1 令 $R_1=Z[x]/(2x,x^2)$，$R_2=Z_2[x,\{y_i|i\in\Lambda\}]/(x^2,\{xy_i|i\in\Lambda\})$，$R_3=Z_4[\{x_i|i\in\Lambda\}]/(\{2x_i|i\in\Lambda\})$。$\Lambda$ 为无限集。$\Gamma(R_i)$是一个无限星图很容易验证。

接下来讨论双星图与交换环之间的对应关系，首先给出一个引理：

引理 1.1 设 R 是交换环，x-oy-oz 是$\Gamma(R)$中长为 2 的道路。若 x-oy-oz 不包含在$\Gamma(R)$的任何圈中，则 $R/Ann(y)\cong Z_2$。

证明: 对于任意的 $r\in R$，反设 $ry\neq 0,y$，若 $ry=x$，则 x-oy-oz-ox 是$\Gamma(R)$中长为 3 的圈，若 $ry\neq x$，则 x-oy-oz-ox 是$\Gamma(R)$中长为 4 的圈，与已知矛盾。考虑正合列 $0\to Ann(y)\to R\to Ry\to 0$，有 $R/Ann(y)\cong Ry$，因此 $R/Ann(y)\cong Z_2$。

定理 1.3 设 R 是交换环满足$\Gamma(R)$是双星图，则 $R/Ann(y)\cong Z_2\times Z_4$ 或者 $R/Ann(y)\cong Z_2\times Z_2[x]/(x^2)$。

证明: 由于$\Gamma(R)$为双星图，所以有一条 x-oy-oz-ow 的道路存在，其长度为 3，而$\Gamma(R)$内不存在圈，因此 x-oy-oz 和 x-oz-ow 都处于任何一个圈之外。由引理 1.1 可得 $R/Ann(y)\cong Ry\cong Z_2$，$R/Ann(z)\cong Rz\cong Z_2$，因此 $Ann(y)$与 $Ann(z)$都是 R 的理想值，易知 $Ann(y)\neq Ann(z)$，因此 $R=Ann(y)+Ann(z)$。

令 $J=Ann(y)\cap Ann(z)$，可知 $J\neq\{0\}$，而 y-oz 在任何一个圈之外，因此 $J\subseteq\{0,y,z\}$，如两者相等，

可得 $y+z=0$，即 y 与 z 互为倒数，因此 $\mathrm{A}nn(y)=\mathrm{A}nn(z)$，这与 $\mathrm{A}nn(y)\neq\mathrm{A}nn(z)$矛盾，因此 $\mathrm{J}=\{0,y\}$ 或者 $\mathrm{J}=\{0,z\}$。不妨设 $\mathrm{J}=\{0,y\}$，则 $y^2=0$，$z^2\neq0$，可以选择 z^2。为证明 $z^2=z$，首先假设 $z^2\neq z$，如果 $z^2=y$，则得出 $yw=0$，形成 y-oz-ow-oy 的三角形，显然不存在这种可能。所以 $z^2\neq y$，同理可证 $z^2\neq w$，而 $z^2w=0=z^2y$，所以形成 y-oz-ow-oz^2-oy 的四边形，与已知的条件存在矛盾，所以该假设不成立，从而反向证明出 $z^2=z$。在这种情况下，直和分解 $\mathrm{R}=\mathrm{R}z\oplus\mathrm{R}(1-z)$，可以选择 $\mathrm{R}(1-z)$。因为 $\mathrm{R/J}\cong\mathrm{R/A}nn(y)\times\mathrm{R/A}nn(z)$，所以 $\mathrm{R}/\{0,y\}\cong Z_2\times Z_2$，且$|\mathrm{R}|=8$。因为 $\mathrm{R}(1-z)\cong\mathrm{R/R}z$，得出$|\mathrm{R}(1-z)|=4$，在基于同构原则的交换环中，只有 Z_4、$Z_2[x]/(x^2)$、$Z_2\times Z_2$ 的阶为 4，不难验证当 $\mathrm{R}(1-z)\cong Z_2\times Z_2$ 时，$\mathrm{R}\cong Z_2\times Z_2\times Z_2$。此时$\Gamma(\mathrm{R})$不是双星图。因此 $\mathrm{R}(1-z)\cong Z_4$，或者 $\mathrm{R}(1-z)\cong Z_2[x]/(x^2)$。此时，R 同构于 $Z_2\times Z_4$，或者 $Z_2\times Z_2[x]/(x^2)$。

到目前为止已完全解决了无圈图与交换环之间的对应关系。

2 有圈图对应的交换环

由于零因子图中有圈图的种类繁多，因此它与交换环之间的对应关系的研究也就比较复杂。在这部分主要讨论完全图带一个角对应的交换环的代数结构。首先给出交换环上有圈的零因子图的一个具体刻画：

命题 2.1 设 R 是交换环满足 $G=\Gamma(\mathrm{R})$且 $\mathrm{K(G)}\neq0$，则$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}=\{x\in Z(\mathrm{R})^*|\mathrm{A}nn(x)=(0,y)$，其中 $y\in\mathrm{K(G)}\}$。在特别情况下，若$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}\neq0$，则$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$中的点都是离散的。

证明： 令 $\mathrm{W}=\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}=\{x\in Z(\mathrm{R})^*|\mathrm{A}nn(x)=(0,y)$，其中 $y\in\mathrm{K(G)}\}$。易知对任意的 $x\in\mathrm{W}$，有 $\deg(x)=1$，故 $\mathrm{W}\cap\mathrm{K(G)}=0$，于是有 $\mathrm{W}\subseteq\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$，下面证明$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}\subseteq\mathrm{W}$：

首先证明对任意的 $x\in\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$，存在 $y\in\mathrm{K(G)}$，使得 $xy=0$。取 $x\in\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$，$z\in\mathrm{K(G)}$，有 $d(x,z)\leq3$。当 $d(x,z)=1$ 时，结论显然成立。若 $d(x,z)=3$，则存在 $x_2,x_3\in Z(\mathrm{R})^*$满足 x-ox_2-ox_3-oz 是$\Gamma(\mathrm{R})$中长为 3 的道路，由定理 1.3 可知$\{x_2,x_3\}\in\mathrm{K(G)}$。若 $d(x,z)=2$，则存在 $x_2\in Z(\mathrm{R})^*$满足 x-ox_2-oz 中长为 2 的道路，同理可知 $x_2\in\mathrm{K(G)}$，故对任意的 $x\in\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$，存在 $y\in\mathrm{K(G)}$使得 $xy=0$，即 x 与 y 相连。因为 x 不属于集合 K(G)，所以$\{x,y\}$不是 K(G)的子集。不难证明$\{0,y\}\subseteq\mathrm{A}nn(x)\subseteq\{0,x,y\}$，则 $x+y\in\mathrm{A}nn(x)\rightarrow x+y=0\rightarrow x=-y\rightarrow x\in\mathrm{K(G)}$，这与 x 不属于集合 K(G)矛盾。故 $\mathrm{A}nn(x)=\{0,y\}$，这样就证明了$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}\subseteq\mathrm{W}$，综上可得 $\mathrm{W}=\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$。

当$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}\neq0$ 时，由上述的证明可知$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$中的点只与 K(G)中的点相邻，故$\Gamma(\mathrm{R})\backslash\mathrm{K(G)}$中的点都是离散的。

由命题 2.1 的的证明思路，自然会想到这样的一个问题：完全图带一簇端点集是否是交换环的零因子图？下面将对这一问题进行讨论。

定义 2.1 完全图带一个角是指在完全图中的某一个顶点上添加若干端点，顶点与端点之间相连接所构成的图，记为 $\mathrm{K}n\odot\mathrm{T}$，其中 T 是与完全图 $\mathrm{K}n$ 的一个项点相连的所有端点的集合。

显然，当 $n=1,2$ 时，$\mathrm{K}n\odot\mathrm{T}$ 是星图。只有当 $n\geq3$ 时，$\mathrm{K}n\odot\mathrm{T}$ 才是有圈图。由于已经确定了与星图对应的有限交换环的代数结构，因此仅需要对 $n\geq3$ 的情况进行讨论。

定理 2.1 设 R 是交换环满足 Z®$=\mathrm{N(R)}$且$\Gamma(\mathrm{R})=\mathrm{K}n\odot\mathrm{T}$，则 $n=3$，$|\mathrm{T}|\leq4$。

证明： 显然$\Gamma(\mathrm{R})$是星图加细，不妨假设 c 是$\Gamma(\mathrm{R})$的中心。令 $\mathrm{I}=\mathrm{V}(\mathrm{K}n)\cup\{0\}$，显然 $c\in\mathrm{I}$，易知 $\mathrm{R}c=\{0,c\}$，故 $c^2=0$。下面要证明 $\mathrm{IT}\subseteq\{0,c\}$。

事实上，若 IT 不是$\{0,c\}$的子集，则存在 $b\in\mathrm{V}(\mathrm{K}n)\backslash\{c\}$，以及 $t\in\mathrm{T}$，在这种情况下，bt 不属于集合$\{0,c\}$。易知 $bt\in\mathrm{V}(\mathrm{K}n)$，若 $bt=b$，则 $1-t\in\mathrm{A}nn(b)\subseteq\mathrm{A}nn(c)$，再由 $ct=0$ 可推出 $c=0$，显然这是不可能的。故 $bt\neq b$，因为 $b+bt\neq0,b,bt$，所以 $b+bt\in\mathrm{V}(\mathrm{K}n)$，而且 $b(b+bt)=0=b\cdot bt$，所以可以推断出 $b^2=0$。根据以上分析，可以考虑选择 bt^2，利用前面类似的证明可得 $bt^2\neq0,b,bt$，若 $bt^2=c$，那么$(bt)^2=b(bt^2)=0=(bt)t^2$，由此可推出 $t^2\in\mathrm{A}nn(bt)\backslash\mathrm{A}nn(b)=0$，这显然也不可能。因此 $bt^2\neq0,c,b,bt$，如果重复之前的讨论，得出互不相等的一组数列：$b,bt,bt^2,\ldots bt^m,\ldots$，这与已知 Z(R)中所有元素都是幂零元矛盾。因此 $\mathrm{IT}\subseteq\{0,c\}$，下面反设 $n\geq4$，$\mathrm{T}\neq0$ 或者 $n=3$，$|\mathrm{T}|>4$。

若 $n>4$，$\mathrm{T}\neq0$，则至少存在三个互不相同的顶点 $a,b,d\in\mathrm{V}(\mathrm{K}n)$，满足等式成立条件 $ac=bc=dc$

$=0$。当 $t\in T$ 时，$ct=0$，$at=bt=dt=c$，所以 $t(a-b)=0=t(a-d)$，得出 $a-b,a-d\in Ann(t)\backslash\{0\}\subseteq\{t,c\}$，由于 $a-b\neq a-d$，可以设 $a-b=t$，$a-d=c$，而且 $t(b-d)=0$，$a-b\neq a-d=c$，因此 $b-d=t$，$d-b=c$，这显然是矛盾的。

若 $n=3$，$|T|>4$，不妨假设 $V(Kn)=\{a_1,a_2,c\}$，并且至少存在 5 个互不相同的 $t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\in T$，满足 $a_1t_i=c=a_2t_i$，其中 $1\leq i\leq 5$，故 $t_1-t_i\in[Ann(a_1)\cap Ann(a_2)]\backslash\{0\}\subseteq\{a_1,a_2,c\}$，其中 $2\leq i\leq 5$。显然，对任意的 $i\neq j$，都有 $t_1-t_i\neq t_1-t_j$，这与 $\{t_1-t_i|2\leq i\leq 5\}\subseteq\{a_1, a_2,c\}$ 矛盾。

综上所述，仅当 $n=3$，$|T|>4$ 时，$G=Kn\odot T$ 才是环的零因子图。G 为有限图[10,11]，当 $|T|=1,2$ 或者 3 时，$K_3\odot T$ 都没有对应的交换环。只有当 $|T|=4$ 时，$K_3\odot T$ 才成为环的零因子图，其有限局部环互不同构：

$Z_2[x]/(x^4)$，$Z_4[x]/(x^2+2)$，$Z_4[x]/(x^2+2x+2)$，$Z_4[x]/(x^3-2,2x)$，Z_{16}

为了读者的理解方便，定理 3.1 中的图结构如图 1 所示。

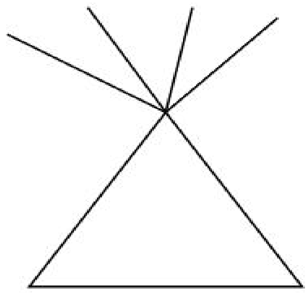

图 1 图 $K_3\odot T$，其中 $|T|=4$
Fig.1 Figure K3⊙T,where|T|=4

参考文献

[1] Yousefian DA, Puczyłowski ER. On 2-absorbing commutative semigroups and their applications to rings[J]. Semigroup Forum, 2013,86(1):83-91

[2] Lakos G. Factorization of Laurent series over commutative rings[J]. Linear Algebra and its Applications, 2010,432(1):338-346

[3] Letzter ES, Wang LH. Prime ideals of Q-commutative power series rings[J]. Algebras and representation theory, 2011,14(6):1003-1023

[4] Atkarskaya AS,Bunina EI, Mikhalev AV. Isomorphisms of general linear groups over associative rings graded by a commutative group[J]. Doklady. Mathematics, 2011,83(2):175-176

[5] Afkhami M, Khashyarmanesh K, Nafar K. Generalized Cayley graphs associated to commutative rings[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012,437(3):1040

[6] Armand MA. List decoding of generalized Reed-Solomon codes over commutative rings[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005,51(1):411-419

[7] Buckley MS, MacHale D. Variations on a theme: rings satisfying x~3=x are commutative[J]. The American mathematical monthly, 2013,120(5):430-440

[8] Wang HJ. Co-maximal graph of non-commutative rings[J]. Linear Algebra and its Applications, 2009,430(2-3):633-641

[9] Wei QJ, Zhang QF. On strong orthogonal systems and weak permutation polynomials over finite commutative rings[J]. Finite Fields and Their Applications, 2007,13(1):113-120

[10] Zhou JM, Wang DY, Zhang QH. Square-zero derivations of matrix algebras over commutative rings[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2010,58(1):239-243

[11] Bunina EI. Automorphisms of the semigroupof nonnegative invertible matrices of order two over partially ordered commutative rings[J]. Mathematical Notes, 2012,91(1):3-11