山东农业大学学报(自然科学版),2016,47(1):155-156 VOL.47 NO.1 2016
Journal of Shandong Agricultural University (Natural Science Edition) doi:10.3969/j.issn.1000-2324.2016.01.032

泰勒公式中中值位置的研究

王志武,李 钧
山东农业大学信息科学与工程学院, 山东 泰安 271018

摘 要: 泰勒（Taylor）公式在微分学中占有十分重要的地位，它建立了函数增量、自变量增量与函数导数之间的关系。本文对泰勒公式中中值的位置进行了探讨，发现了在一定条件下泰勒公式中的中值有相对固定的位置。

关键词: 泰勒公式; 中值
中图法分类号: O151.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-2324(2016)01-0155-02

Study on the Median Position in Taylor Formula

WANG Zhi-wu, LI Jun
College of Information Science and Engineering/Shandong Agricultural University, Taian 271018, *China*

Abstract: Taylor formula plays an important role in differential calculus. It builds relationships among function increment, independent variable increment and function derivative. This paper explored the location of Taylor formula median to find that Taylor formula median had a relatively fixed location in certain conditions.

Keywords: Taylor formula; median

微分学中著名的泰勒公式是：若 $f(x)$ 在包含 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，则对 $\forall x \in (a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (1)$$

其中，$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1)$.

（1）称为泰勒公式[1]，$R_n(x)$ 称为泰勒公式的拉格朗日余项.$\xi=x_0+\theta(x-x_0)$ 在 x_0 和 x 之间，也称为泰勒公式的中值，θ 的取值决定了 ξ 在区间 (x,x_0) 或 (x,x_0) 中的位置.下面的定理将给出 θ 极限取值的一个条件.

为证明定理方便起见，下面给出带佩亚诺余项的泰勒公式的条件结论.它们是：若 $f(x)$ 在点 $x_0\in(a,b)$ n 阶可导，则对 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n] \quad (2)$$

（2）称为带佩亚诺余项的泰勒公式[2]，$o[(x-x_0)^n]$ 称为佩亚诺余项.

下面给出本文的主要结论：

定理 若 $f(x)$ 在包含 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n+2)}(x_0)$ 存在，若 $f^{(n+2)}(x_0)\neq 0$，则对泰勒公式（1）中的 θ，有

$$\lim_{x\to x_0}\theta=\frac{1}{n+2}$$

证明 $f(x)$ 在包含点 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，泰勒公式（1）显然成立，从而对 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (3)$$

利用 $f^{(n+1)}(x)$ 在点 x_0 可导及带佩亚诺余项的泰勒公式，得

$$f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]=f^{(n+1)}(x_0)+f^{(n+2)}(x_0)\theta(x-x_0)+o(x-x_0) \quad (4)$$

收稿日期: 2014-10-02 **修回日期**: 2014-12-22
作者简介: 王志武(1963-),男,副教授.主要从事基础数学研究. Email:wangzw@sdau.edu.cn
数字优先出版: 2015-11-13 http://www.cnki.net

将（4）代入（3），得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0)+f^{(n+2)}(x_0)\theta(x-x_0)+o(x-x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

整理得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(x_0)\theta(x-x_0)^{n+2}}{(n+1)!}+o(x-x_0)^{n+2}$$

因为，$f^{(n+2)}(x_0)\neq 0$，从而可解之

$$\theta=\frac{(n+1)!}{f^{(n+2)}(x_0)}\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+o(x-x_0)^{n+2}]}{(x-x_0)^{n+2}}$$

两边 $x\to x_0$ 求极限，有

$$\lim_{x\to x_0}\theta=\frac{(n+1)!}{f^{(n+2)}(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}]}{(x-x_0)^{n+2}}$$

连续使用 $n+1$ 次洛必达法则，得

$$\lim_{x\to x_0}\theta=\frac{(n+1)!}{f^{(n+2)}(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(x)-f^{(n+1)}(x_0)}{(n+2)!(x-x_0)}$$

注意到 $f^{(n+1)}(x)$ 在点 x_0 可导，得

$$\lim_{x\to x_0}\theta=\frac{(n+1)!}{f^{(n+2)}(x_0)}\frac{f^{(n+2)}(x_0)}{(n+2)!}=\frac{1}{n+2}$$

下面对该定理的结论予以讨论：

（1）该定理的几何意义是，若 $f(x)$ 在包含 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n+2)}(x_0)$ 存在，若 $f^{(n+2)}(x_0)\neq 0$，则在泰勒公式（1）中，当 $x\to x_0$ 时，中值点 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$ 的极限位置为区间 (x,x_0) 或 (x_0,x) 中的 $\xi=x_0+\frac{1}{n+2}(x-x_0)$ 点[3].

（2）当 $n=0$ 时，$f(x)$ 在包含 x_0 的开区间 (a,b) 可导，且 $f''(x_0)$ 存在，若 $f''(x_0)\neq 0$，则对 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)$$

且，

$$\lim_{x\to x_0}\theta=\frac{1}{2}$$

即，泰勒公式的中值点 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$ 的极限位置位于区间 (x,x_0) 或 (x_0,x) 的中点位置[4].

最后需要说明的是，若 $f(x)$ 在包含 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n+2)}(x_0)=0$，则定理的结论未必成立.例如 $n=0,x_0=0$ 时，对于 $f(x)=x^3$，有

$$x^3=0+3(\theta x)^2x$$

$$\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ 与 }\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}\text{ 不符.}$$

参考文献

[1] 华东师范大学数学系.数学分析[M].上册.北京:高等教育出版社,2003

[2] 同济大学数学教研室.高等数学[M].上册.北京:高等教育出版社,2007

[3] 陈 丽.关于泰勒公式课堂教学的尝试与体会[J].高等数学研究,2010,13(2):59-60

[4] 王志武,王希超.谈泰勒公式的教学[J].高等数学研究,2014,17(5):40-42