

第三类边界条件下长圆柱对流融化过程的分阶段求解

孟凡康^{1,2*}, 于航¹, 褚琦²

1. 同济大学机械与能源工程学院, 上海 201804

2. 辽宁工程技术大学 建筑工程学院, 辽宁 阜新 123000

摘要: 为了研究圆柱融化各个传热阶段的特性, 以第三类边界条件下一维长圆柱对流融化过程为研究对象, 同时考虑融化后的相变材料被周围流体及时带走, 按照圆柱内部温度分布特性把传热过程分成3个阶段, 并采用三次多项式热平衡积分方法对各阶段进行近似求解, 以长冰柱对流融化过程为计算对象, 分析了各控制参数对于相界面移动规律的影响。通过分析得出结论如下: 当 $Bi \leq 3(T_m - T_0)/(\theta_0 - T_m)$ 时长圆柱传热过程分为两个阶段, 当 $Bi > 3(T_m - T_0)/(\theta_0 - T_m)$ 时分为三个阶段; 不同控制参数条件下, 相界面均随时间约呈线性变化规律; 随着对流换热系数、冰柱初始温度及水流温度的增大, 相界面随时间变化率越大。不同冰柱直径条件下, 相界面随时间变化率基本相同。

关键词: 融化过程; 长圆柱; 第三类边界条件

中图分类号: TK02

文献标识码: A

文章编号: 1000-2324(2016)03-0441-06

Periodic Solution for the Melting Convection Process of Length Cylinder under the Third Boundary Condition

MENG Fan-kang^{1,2*}, YU Hang¹, CHU Qi²

1. The School of Mechanical and Energy Engineering/Tongji University, Shanghai 201804, China

2. The School of Architecture Engineering/Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China

Abstract: In order to study the characteristics of each melting heat conduction process of the length cylinder, this paper concerned the one-dimensional convective melting process of a length cylinder under the third boundary condition and considered the phase change material that would be took away by the surrounding fluid in time after melting. The heat transfer process was divided into three stages according to the temperature distribution inside the cylinder. A cubic heat balance integral method was used in solving the approximate solution of each stage. Taking the convective melting process of the length cylinder as the calculating object to analyze the change impacted by each governs parameter of the moving regulation of phase change interface, some conclusions could be got as follow: The heat transfer process of the length cylinder could be divided into 2 phases in the condition of $Bi \leq 3(T_m - T_0)/(\theta_0 - T_m)$, on the contrary $Bi > 3(T_m - T_0)/(\theta_0 - T_m)$, it could be divided into 3 phases. In the condition of different control parameters, the phase change interface varied in a linear manner with time. With the increase of the initial temperature of the icicle, the temperature of water fluid and convective heat transfer parameter, the variation rate of phase change interface with time also increased. In the condition of different icicle's diameter, the variation rate of phase change interface almost maintained the same value with time.

Keywords: Melting process; length cylinder; the third boundary condition

固液融化问题在自然界和工业领域非常广泛^[1-4]。其中, 河流冲刷冰面以及外融冰蓄冰槽中水流直接冲刷冰柱表面的现象属于典型的固液融化问题。该类问题属于第三类边界条件下的对流相变基础科学问题。对此类问题的研究有利于指导工程实际应用。

相变问题的理论求解方法, 可以分为精确解法和近似解法。目前精确求解方法只存在于一些模型和边界条件都非常简单的情况^[5-7]。近似解法主要包括: 准稳态法^[8]、摄动法^[9]、热阻法^[10]、逐次逼近法^[11]和多项式热平衡积分法^[1,12,13]等。采用分阶段传热计算模型, 并采用多项式热平衡积分近似方法是解决此类相变传热问题的常用方法。Ho CD等^[12]研究了空气外掠半无限大冰层融化换热问题, 传热过程分成融化前和融化后两个阶段, 采用二次多项式热平衡积分方法对冰层内的温度场进行近似求解。Myers TG等采用三次多项式热平衡积分方法, 分别研究了一维有限厚度平板的相变问题^[13]和直接接触相变问题^[1]。文献^[13]中平板两侧分别施加不同第三类边界条件, 按照融化过程特性, 把相变过程分成四个阶段。研究对象是放置在空气中的相变材料, 即融化后的相变材料在表面形成一

收稿日期: 2015-01-05

修回日期: 2015-03-09

基金项目: 辽宁省大学生创新创业计划项目(201610147000006)

作者简介: 孟凡康(1979-),男,博士研究生,主要从事外融冰相界面传热工作. E-mail:mfk3999147@126.com

***通讯作者:** Author for correspondence. E-mail:mfk3999147@126.com

层液体传热层。文献[1]研究了直接接触相变传热问题，把相变过程分成三个阶段。两篇文献均分阶段推导了计算模型和求解方法，同时验证了三次多项式热平衡积分法相对于二次多项式、指数热平衡积分法等具有较高的计算精度。

区别于已有文献，本文以第三类边界条件下，长圆柱对流融化过程为研究对象，同时考虑融化后的相变材料被周围流体及时带走，把传热过程分成3个阶段，采用三次多项式热平衡积分方法进行近似求解。最后以冰柱对流换热融化过程为研究对象，分析讨论了冰柱内部各过程的温度分布，以及对流换热系数、冰柱尺寸、冰柱初始温度及水流温度对于相界面移动规律的影响。本文所建立的方法，可以完整的分析第三类边界条件下圆柱相变材料整个融化过程的传热特性，方便的分析显热在各阶段传热特性以及控制参数对于相界面移动规律的影响。

1 物理模型

研究对象为一半径为 H 的长圆柱，融化温度为 T_m ，环境温度为 θ_0 ， $\theta_0 > T_m$ ，对流换热系数为 h ，圆柱的初始温度为 T_0 ， $T_0 < T_m$ 。

本文只讨论如下情形：按照融化时间顺序，融化过程分为 3 个阶段，如图 1 所示。第 1 阶段（图 1a），即传热开始至圆柱表面开始融化阶段，从圆柱表面与外界环境之间开始传热为起点（ $t=0$ ），圆柱边界温度达到熔点温度为终点（ $t=t_1$ ），此阶段中温度渗透深度为 $\delta_0(t)$ ；第 2 阶段，即圆柱表面开始融化至圆柱中心温度开始上升阶段（图 1b），从 t_1 开始，圆柱中心温度开始上升（ $t=t_2$ ）结束，此阶段中温度渗透深度为 $\delta_1(t)$ ，相界面的位置为 H_1 ，当 $t=t_2$ 时， $\delta_1(t_2)=0$ ；第 3 阶段（图 c），即圆柱中心温度开始上升至传热结束阶段，从 t_2 开始，圆柱融化完毕（ $t=t_3$ ）结束，相界面的位置为 H_2 。

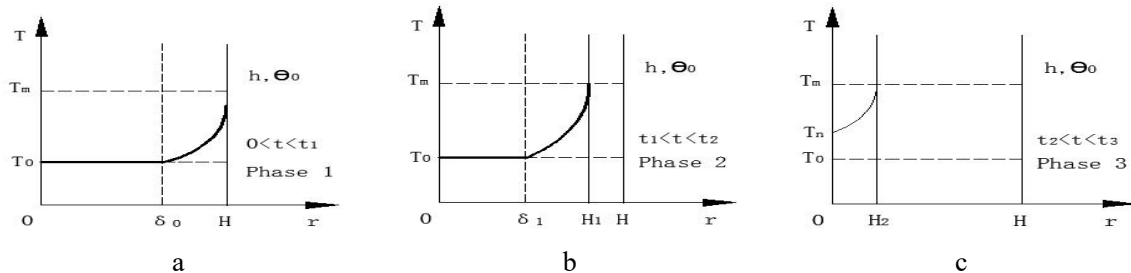


图 1 对流融化过程 3 个阶段温度分布示意图

Fig.1 The temperature profile of convection melting process in three stages

2 求解过程

本文采用三次多项式热平衡积分法对长圆柱内部温度场进行近似求解。该方法是采用三次多项式简单函数来近似描述温度分布的一种方法，且不含二次项三次多项式能更好的反映传热过程的温度场^[13]。圆柱内部温度分布方程采用方程（1）形式^[1,13]：

$$T(r,t) = A + B(r - \delta(t)) + C(r - \delta(t))^3 \tag{1}$$

其中 A, B, C 为多项式的系数，可以按照各个阶段的具体条件分别求出。

2.1 传热开始至圆柱表面开始融化阶段

在本阶段，圆柱还没有融化。温度渗透深度至圆柱边界范围内（ $[\delta_0(t), H]$ ）温度发生变化，而其余地方维持在初始温度 T_0 当边界的温度达到 T_m 时，该阶段结束，时间为 $t=t_1$ 需要说明的是，在温度深度 $\delta_0(t)$ 处，假设温度平顺变化，该处存在两个定解条件^[13]（下文第 2, 第 3 阶段中分别出现在 $\delta_1(t)$ 和圆柱中心 0 处）。

圆柱内部导热控制方程，及其定解条件如下：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad 0 < t \leq t_1, r \in [\delta_0(t), H] \tag{2}$$

$$T = T_0 \quad r = \delta_0(t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = \delta_0(t) \quad (4)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = h(T_{r=H} - \theta_0) \quad r = H \quad (5)$$

方程(3)、(4)、(5)分别带入(1)可以得到: $A = T_0, B = 0, C = -\frac{h(T_0 - \theta_0)}{(H - \delta_0(t))^2(h(H - \delta_0(t)) + 3\lambda)}$

从而圆柱内温度分布可以表示为:

$$T(r, t) = T_0 - \frac{h(T_0 - \theta_0)}{(H - \delta_0(t))^2(h(H - \delta_0(t)) + 3\lambda)}(r - \delta_0(t))^3 \quad (6)$$

对方程(2)在 $0 < t \leq t_1, r \in [\delta_0(t), H]$ 进行积分, 可以获得关于 $\delta_0(t)$ 的方程:

$$\frac{d\delta_0(t)}{dt} = -\frac{6a(h(H - \delta_0(t)) + 3\lambda)(3H^2 + 5\delta_0(t)^2 - 8H\delta_0(t) + 2\delta_0(t)^2 \ln(H/\delta_0(t)))}{h(H - \delta_0(t))^4 + 6\lambda(H - \delta_0(t))^3} \quad (7)$$

当该阶段结束时 $t=t_1$, 温度渗透深度为:

$$\delta_0(t_1) = H - \frac{3\lambda(T_m - T_0)}{h(\theta_0 - T_m)} \quad (8)$$

2.2 圆柱表面开始融化至中心温度开始上升阶段

本阶段, 长圆柱表面开始融化, 圆柱中心至温度渗透深度($[0, \delta_1(t)]$)维持在初始温度, 相界面位置为 H_1 当圆柱中心的温度开始上升时, 该阶段结束, 时间为 $t=t_2$ 。

圆柱内部导热控制方程, 相界面能量方程及其定解条件如下:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad t_1 < t \leq t_2 \quad r \in [\delta_1(t), H_1] \quad (9)$$

$$\rho L \frac{dH_1}{dt} = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + h(\theta_0 - T_m) \quad r = H_1 \quad (10)$$

$$T = T_0 \quad r = \delta_1(t) \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = \delta_1(t) \quad (12)$$

$$T = T_m \quad r = H_1 \quad (13)$$

方程(11)、(12)、(13)分别带入(1)可以得到: $A = T_0, B = 0, C = \frac{T_m - T_0}{(H_1 - \delta_1(t))^3}$

从而圆柱内温度场可以表示为:

$$T(r, t) = T_0 + \frac{T_m - T_0}{(H_1 - \delta_1(t))^3}(r - \delta_1(t))^3 \quad (14)$$

对方程(9)在 $t_1 < t \leq t_2, r \in [\delta_1(t), H_1]$ 进行积分, 可以获得如下方程:

$$3 \frac{dH_1}{dt} + \frac{d\delta_1(t)}{dt} = \frac{6a(6H_1^2 + 10\delta_1(t)^2 - 8H_1\delta_1(t) + \delta_1(t)^2 \ln(H/\delta_1(t)))}{(\delta_1(t) - H_1)^3} \quad (15)$$

方程(10)可以表示为:

$$\rho L \frac{dH_1}{dt} = 3\lambda \frac{T_m - T_0}{H_1 - \delta_1(t)} + h(T_m - \theta_0) \quad (16)$$

经过上面的转换, 方程(9)和(10)转化为易于求解的常微分方程(15)和(16), 其中包括两个待求函数 H_1 和 $\delta_1(t)$ 。

2.3 圆柱中心温度开始上升至传热结束阶段

以上一阶段的结束点 t_2 为开始, 至圆柱融化完全为结束, 时间为 $t=t_3$ 此阶段温度渗透深度已经达到圆柱中心, 且圆柱中心温度不再维持在 T_0 , 而是关于时间的函数 $T_n(t)$ 。

圆柱内部导热控制方程, 相界面能量方程及其定解条件如下:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad t_2 < t \leq t_3 \quad r \in [0, H_2] \quad (17)$$

$$\rho L \frac{dH_2}{dt} = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + h(\theta_0 - T_m) \quad r = H_2 \quad (18)$$

$$T = T_n(t) \quad r = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0 \quad (20)$$

$$T = T_m \quad r = H_2 \quad (21)$$

方程 (19)、(20)、(21) 分别带入 (1) 可以得到: $A = T_n(t), B = 0, C(t) = \frac{T_m - T_n(t)}{H_2^3}$

从而圆柱内温度场可以表示为:

$$T(r, t) = T_n + \frac{T_m - T_n}{H_2^3} r^3 \quad (22)$$

对方程 (17) 在 $t_2 < t \leq t_3, r \in [0, H_2]$ 范围内进行积分, 可以获得如下方程:

$$\frac{6a(T_m - T_n)}{H_2} = -(T_m - T_n) \frac{dH_2}{dt} + H_2 \frac{dT_n}{dt} \quad (23)$$

方程 (18) 可以表示为:

$$\rho L \frac{dH_2}{dt} = 3\lambda \frac{T_m - T_n}{H_2} - h(\theta_0 - T_m) \quad (24)$$

同样经过上面的转换, 方程 (17) 和 (18) 转化为易于求解的常微分方程 (23) 和(24), 其中包括两个待求函数 H_2 和 $T_n(t)$ 。

3 分析与讨论

以长冰柱对流融化过程为计算对象, 表 1 为根据文献 13 所取冰/水的热物性参数值。下文中除了特殊说明的计算数值外, 其余均采用表 1 数值。

在第 1 阶段, 由式 (8) 可得, $t = t_1$ 时, 当 $Bi \leq \frac{3(T_m - T_0)}{(\theta_0 - T_m)}$ 时, 温度渗透深度已经达到冰柱的轴心, 此时没有第 2 阶段, 这种情况本文由于篇幅问题不予讨论, 本文只考虑 $Bi > \frac{3(T_m - T_0)}{(\theta_0 - T_m)}$ 时的情况。

表 1 冰/水参数值

Table 1 Parameter values for ice/water

符号 Symbol	参数值 Parameter	单位 Unit	符号 Symbol	参数值 Parameter	单位 Unit
λ	2.18	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	θ_0	298	K
L	3.34×10^5	$J \cdot kg^{-1}$	a	1.16×10^{-6}	$m^2 \cdot s^{-1}$
T_m	273	K	T_0	258	K
ρ	917	$kg \cdot m^{-3}$	H	0.05	m
h	763	$Wm^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}$			

图 2 为 $h=763 Wm^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}$ 融化过程各时间冰柱内部温度分布图。第 1 阶段整个过程时间约为 2.98 s, 温度渗透深度较小 ($5.14 \times 10^{-3} m$), 此阶段相界面处温度梯度较大, 说明此阶段显热交换量较大。第 2 阶段结束时 t_2 约为 92 s, 温度渗透至冰柱轴心, 相界面位置 H_1 为 $4.55 \times 10^{-2} m$ 。第 3 阶段结束时 $t_3=856 s$ 。图中包括了同 $t_2/2$ (46 s)、 t_2 (92 s)、 $t_3/4$ (214 s)、 $t_3/2$ (428 s) 及 $3t_3/4$ (642 s) 时冰柱内温度分布图。

由图可见, 传热开始阶段冰柱内部存在较大梯度, 随着融化的进行除了相界面保持温度不变外, 其余各点温度均有所上升, 在融化后期冰柱内部各点温度趋于一致, 并接近于相变温度。

图 3 为显热量随时间变化图, 从图中可见, 显热量随时间呈阶段性变化, 即第 1 阶段, 该阶段时间非常短暂, 且没有发生相变, 传热量全部来自显热交换, 该阶段显热量相同且最大。第 2 阶段, 显热量迅速下降, t_2 时显热量约为全部换热量的 11%。第 3 阶段, 显热量下降较为缓慢, 融化过程后期显热量接近为 0。

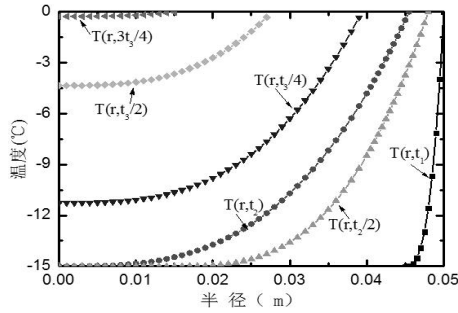


图 2 不同时间冰柱内温度分布图

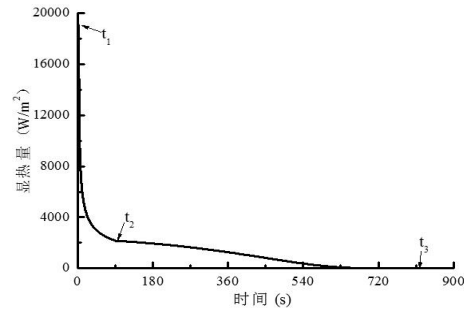


图 3 显热量随时间变化图

Fig.2 The temperature distribution in icicle at different times

Fig.3 Sensible heat variation the with the time

图 4 为其他控制参数不变, 不同对流换热系数条件下相界面随时间变化图.由图 4 可见, 对流换热系数分别为 500、1000、1500 及 2000 $Wm^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}$ 条件下, 相界面随时间约呈线性变化规律, 随着对流换热系数的增大, 相界面随时间变化率越大 (其变化率分别为 3.85×10^{-5} 、 7.69×10^{-5} 、 1.14×10^{-4} 及 $1.56 \times 10^{-4} m \cdot s^{-1}$)。究其原因, 对流换热系数越大, 水流与冰柱之间的换热量越大, 即潜热交换量越大, 所以相界面随时间变化率越大。

图 5 为其他控制参数不变, 冰柱厚度分别为 0.03 m、0.055 m、0.08 m 及 0.105 m 条件下相界面随时间变化图, 从图中可以看出不同厚度条件下, 相界面随时间约呈线性变化规律, 其变化率基本相同, 约为 $5.88 \times 10^{-5} m \cdot s^{-1}$ 。

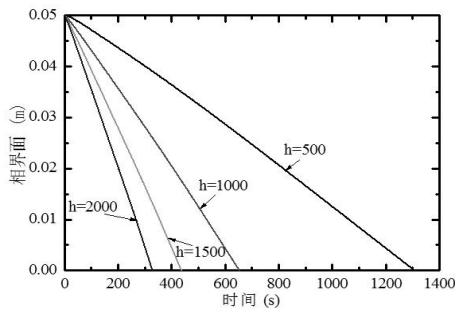


图 4 不同对流换热系数条件下相界面位置随时间变化
Fig.4 Variation of phase interface location with time under the different heat transfer coefficients

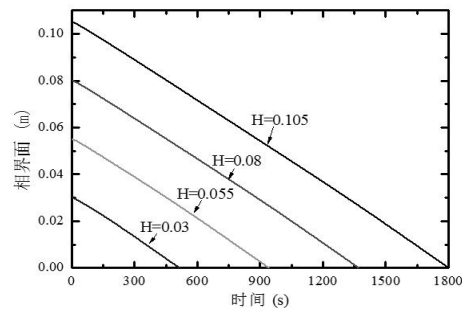


图 5 不同冰柱厚度条件下相界面位置随时间变化
Fig.5 Variation of phase interface location with time under the condition of different pillar thicknesses

图 6 为其他控制参数不变, 冰柱初始温度分别为 $-5^\circ C$ 、 $-10^\circ C$ 、 $-15^\circ C$ 、及 $-20^\circ C$ 条件下相界面随时间变化图, 从图中可以看出不同冰柱初始温度条件下, 相界面随时间越呈线性变化规律, 随着冰柱初始温度的降低, 其变化率越小 (其变化率分别为 6.25×10^{-5} 、 5.95×10^{-5} 、 5.88×10^{-5} 及 $5.68 \times 10^{-5} m \cdot s^{-1}$)。究其原因, 冰柱温度越低显热所占总换热量越大, 潜热交换量所占比例相对较小, 所以相界面随时间变化率越小。

图 7 为其他控制参数不变, 外界水流温度分别为 $9^\circ C$ 、 $17^\circ C$ 、 $25^\circ C$ 及 $33^\circ C$ 条件下相界面随时间变化图, 由图可见, 不同水流温度条件下, 相界面随时间约呈线性变化规律, 水流温度越大, 其相界面随时间变化率越大 (其变化率分别为 2.17×10^{-5} 、 3.95×10^{-5} 、 5.88×10^{-5} 及 $7.69 \times 10^{-5} m \cdot s^{-1}$)。究其原因, 水流温度越大, 水流与冰柱之间的换热量越大, 即潜热交换量越大, 所以相界面随时间变化率越大。

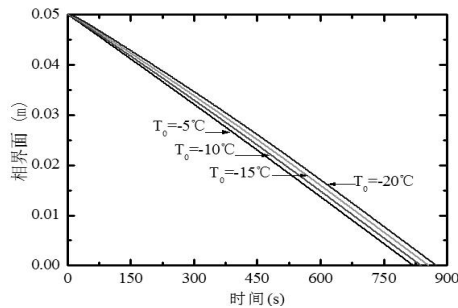


图 6 不同冰柱初始温度条件下相界面位置随时间变化图
Fig.6 Variation of phase interface location with time under the different original temperatures on icicle

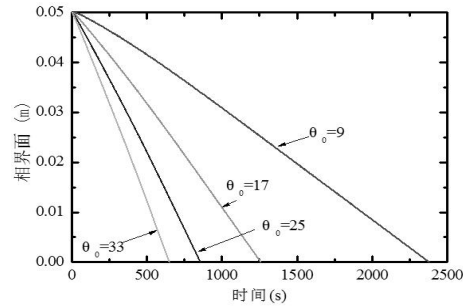


图 7 不同水流温度条件下相界面位置随时间变化图
Fig.7 Variation of phase interface location with time under the different water temperatures

4 结论

本文建立了第三类边界条件下长圆柱对流融化过程的分阶段求解方法。获得了各阶段圆柱内部温度分布方程及利于求解相界面移动规律的导热控制方程和相界面能量方程。该方法，可以完整的分析整个融化过程的传热特性，可以方便的分析显热在各阶段传热特性以及控制参数对于相界面移动规律的影响。以长冰柱对流融化过程为研究对象，分析了各控制参数对于相界面移动规律的影响。在本文的计算工况下，通过分析讨论得到结论如下：

1) 当 $Bi \leq \frac{3(T_m - T_0)}{(\theta_0 - T_m)}$ 时长圆柱传热过程分为两个阶段，当 $Bi > \frac{3(T_m - T_0)}{(\theta_0 - T_m)}$ 时分为三个阶段；

2) 不同控制参数条件下，相界面均随时间约呈线性变化规律；

3) 随着对流换热系数、冰柱初始温度及水流温度的增大，相界面随时间变化率越大，不同厚度条件下，相界面随时间变化率基本相同。

参考文献

[1] Myers TG, Mitchell SL, Muchatibaya G. Unsteady contact melting of a rectangular cross-section material on a flat plate [J]. Physics of Fluids, 2008,20(10):1-12

[2] 杨 莺,梁艳南,周子民,等.壳管式相变蓄热器传热效率研究[J].热科学与技术,2011,10(3):226-230

[3] 汪 玺,袁艳平,邓志辉,等.相变蓄热水箱的设计与运行特性研究[J].太阳能学报,2014,35(4):670-676

[4] 莫冬传,吕树申,何振辉.相变蓄冷换热器的优化设计[J].工程热物理学报,2015,36(1):175-178

[5] Ei-genk MS, Cronenberg AW. Solidification in a semi-infinite region with boundary conditions of the second kind: An exact solution [J]. Letters in Heat and Mass Transfer, 1979(6):321-327

[6] Gupta SC. The Classical Stefan Problem: basic concepts, modelling and analysis [M]. North-holland:JAI Press,2003:78

[7] 贾 力,方肇洪.高等传热学[M].第2版.北京:高等教育出版社,2008:90

[8] Cheng kc, Inaba H, Gilpin RR. Effects of natural convection on ice formation around an isothermally cooled horizontal cylinder[J]. Journal of Heat transfer, 1988,110(4):931-937

[9] Pedroso RI, Domoto GA. Exact solution by perturbation method for planar solidification of a saturated liquid with convection at the wall[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1973,16(9):1816-1819

[10] 陈则韶.求解凝固相变热传导问题的简便方法—热阻法[J].中国科学技术大学学报,1991,21(3):69-76

[11] Savino JM, Siegel R. An analysis of the transient solidification of a flowing liquid on a convectively cooled wall[C]//Proceedings of the Third International Heat Transfer Conference. USA:NewYork, 1962:123-127

[12] Ho CD, Yeh HM, Wang WP, et al. Cool thermal discharge obtained with air flowing over melting ice by complete removal of melt[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer,2000,27(6):785-794

[13] Myers TG, Mitchell SL, Muchatibaya GA. Cubic heat balance integral method for one-dimensional melting of a finite thickness layer[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2007,50(25):5305-5317